

2020年天津河西區高三二模數學試卷

一、選擇題

(本大題共9小題, 每小題5分, 共45分)

1. 設集合 $M = \{x | x^2 \leq 4\}$, 集合 $N = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$, $\complement_M N = (\quad)$.

- A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{-2, -1, 0\}$ C. $\{x | x \leq -2\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

2. 設 p : “事件 A 與事件 B 互斥”, q : “事件 A 與事件 B 互為對立事件”, 則 p 是 q 的 $(\quad)$.

- A. 充分而不必要條件 B. 必要而不充分條件
C. 充要條件 D. 既不充分也不必要條件

3. 已知 x 與 y 之間的一組數據:

x	0	1	3	4
y	2.2	4.3	4.8	6.7

則 y 與 x 的線性回歸方程為 $\hat{y} = 0.95x + a$, 則 a 的值為 $(\quad)$.

- A. 0.325 B. 0 C. 2.2 D. 2.6

4. 已知雙曲線的一個焦點與拋物線 $x^2 = 20y$ 的焦點重合, 且雙曲線上的一點 P 到雙曲線的两个焦點的距離之差的絕對值等於6, 則該雙曲線的标准方程為 $(\quad)$.

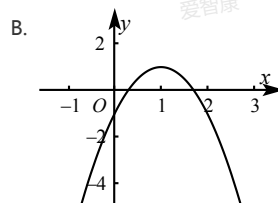
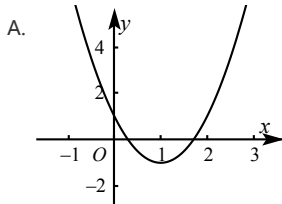
- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ C. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ D. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

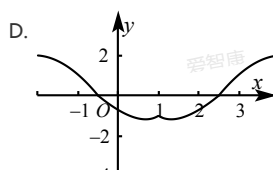
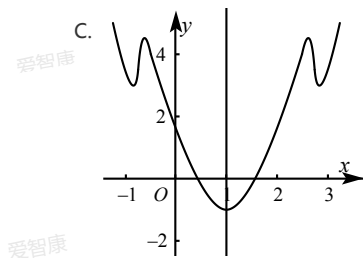
5. 已知 $\triangle ABC$ 的內角 A, B, C 的對邊分別為 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面積為 S , $3c^2 = 16S + 3(b^2 - a^2)$, 則 $\tan B = (\quad)$.

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

6. 已知正四棱錐 $P-ABCD$ 的底面是邊長為 $\sqrt{2}$ 的正方形, 其體積為 $\frac{4}{3}$, 若圓柱的一個底面的圓周經過正方形的四個頂點, 另一個底面的圓心為該棱錐的高的中點, 則該圓柱的表面积为 $(\quad)$.

- A. π B. 2π C. 4π D. 6π

7. 函数 $f(x) = e^{|x-1|} - 2\cos(x-1)$ 的部分图像可能是 $(\quad)$.



8. 用数字0, 1, 2, 3, 4组成没有重复数字且至少有两个数字是偶数的四位数, 则这样的四位数的个数为 ().

A. 64 B. 72 C. 96 D. 144

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1| - 1, & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}f(x-2), & x > 2 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = x \cdot f(x) - a (a \geq -1)$ 的零点个数为2, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$ 或 $a = -1$ B. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$
C. $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$ 或 $a = -1$ D. $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. 设复数 z 满足 $(1 + 2i)z = 3 - 4i$ (i 是虚数单位), 则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中, 常数项是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 若直线 $3x + 4y = m$ 与圆 $x^2 + y^2 = m$ 相切, 则实数 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 某批产品共10件, 其中含有2件次品. 若从该批产品中任意抽取3件, 则取出的3件产品中恰好有一件次品的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 取出的3件产品中次品的件数 X 的期望是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 x, y 为正实数, 且 $xy + 2x + 4y = 41$, 则 $x + y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 分别为 CA, CB 的中点, 点 G 为 AN 与 BM 的交点, 若 $AB = \sqrt{5}, CB = 1$, 且满足 $3\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

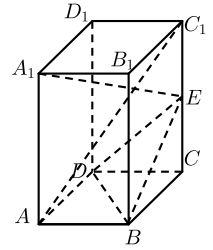
(本大题共5小题, 共75分)

16. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2} (x \in \mathbf{R})$,

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调性.

17. 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB = 2$, E 为 CC_1 的中点.



(1) 求证: $AC_1 \parallel$ 平面 BDE .

(2) 求证: $A_1E \perp$ 平面 BDE .

(3) 若 F 为 BB_1 上的动点, 使直线 A_1F 与平面 BDE 所称角的正弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 DF 的长.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3(a_n - 2)$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, 且满足 $b_1 = \frac{1}{6}a_1$, b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}}$;

(3) 设数列 $\{c_n\}$ 的通项公式 $c_n = \begin{cases} 1, & n \neq 2^k \\ a_k, & n = 2^k \end{cases}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 求 $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

19. 如图, 已知中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆的一个焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 是椭圆上的一点.

(1) 求椭圆的标准方程.

(2) 设椭圆的上、下顶点分别为 A 、 B , $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$) 是椭圆上异于 A 、 B 的任意一点, $PQ \perp y$ 轴, Q 为垂足, M 为线段 PQ 的中点, 直线 AM 交直线 $l: y = -1$ 于点 C , N 为线段 BC 的中点.

① 求证: $OM \perp MN$.

② 若 $\triangle MON$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求 y_0 的值.

20. 已知函数 $f(x) = e^x - e^x \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (e 为自然对数的底数).

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域.

(2) 若不等式 $f(x) \geq k(x-1)(1-\sin x)$ 对任意 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(3) 证明: $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$.